Aula 21

Sistemas Lineares de EDOs de 1ª Ordem
Homogéneos de Coeficientes Constantes

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}$$

com

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \qquad a_{i,j} \in \mathbb{R}.$$

Proposição: Seja A uma matriz $n \times n$ constante com entradas reais. Então,

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v},$$

é solução do sistema linear homogéneo de coeficientes constantes

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}$$

se e só se λ e $\mathbf{v}$ são, respectivamente, valor e vector próprio associado da matriz A.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$\lambda = 2$ multiplicidade algébrica $= 2$, geométrica $= 1$.

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_1 = v_2$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

Uma só solução linearmente independente da forma $e^{\lambda t}\mathbf{v}$,

$$e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Proposição: Uma matriz A, $n \times n$, de coeficientes constantes tem n vectores próprios associados linearmente independentes se e só se é diagonalizável.

Definição: Dada uma matriz A de coeficientes constantes chama-se **multiplicidade algébrica** dum valor próprio λ de A à sua multiplicidade como raíz do polinómio característico $\det(A - \lambda I) = 0$.
Chama-se **multiplicidade geométrica** dum valor próprio λ à dimensão do correspondente espaço próprio, ou seja, ao número de vectores próprios linearmente independentes associados a λ.

Proposição: Seja A uma matriz $n \times n$ de coeficientes constantes e λ um valor próprio. Então

$$1 \leq \text{mult. geométrica de } \lambda \leq \text{mult. algébrica de } \lambda \leq n$$

Definição: Dado um sistema de EDOs lineares de primeira ordem homogéneo

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y},$$

em que $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ com entradas reais contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, designa-se por **matriz solução fundamental**, ou **solução matricial fundamental**, qualquer matriz $X(t)$ cujas colunas formam uma base do espaço das soluções do sistema homogéneo

$$X(t) = \underbrace{\left[\begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{y}_1(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{y}_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{y}_n(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \right]}_{n \text{ sols. lin. independentes}}.$$

Designa-se por **matriz solução principal**, ou **solução matricial principal**, em $t_0 \in I$, a (única) matriz solução fundamental $Y_{t_0}(t)$ tal que $Y_{t_0}(t_0) = I$, ou seja, tal que as suas colunas, além de serem uma base do espaço das soluções, satisfazem especificamente

$$\mathbf{y}_1(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_2(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \mathbf{y}_n(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Proposição: Dado um sistema de EDOs lineares de primeira ordem homogéneo

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y},$$

em que $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ com entradas reais contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e dada uma matriz $X(t)$ solução fundamental do sistema, então a solução geral do sistema é dada por

$$\mathbf{y}(t) = X(t)\mathbf{c} = c_1 \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{y}_1(t) \\ \vdots \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{y}_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{y}_n(t) \\ \vdots \end{bmatrix},$$

com

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

qualquer vector de componentes constantes.

Se $Y_{t_0}(t)$ é a solução principal em t_0, então a solução do problema de valor inicial $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ é dada por

$$\mathbf{y}(t) = Y_{t_0}(t)\mathbf{y}_0.$$

Proposição: Dado um sistema de EDOs lineares de primeira ordem homogéneo

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y},$$

em que $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ com entradas reais contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, então, se $Y_{t_0}(t)$ é a solução matricial principal do sistema em $t_0 \in I$ e $X(t)$ é uma qualquer solução matricial fundamental, tem-se

$$Y_{t_0}(t) = X(t)X^{-1}(t_0).$$

Proposição: Dado um sistema de EDOs lineares de primeira ordem homogéneo

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A(t)\mathbf{y},$$

em que $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ com entradas reais contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, a matriz $X(t)$ é uma solução matricial fundamental do sistema se e só se satisfaz a EDO matricial

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) \\ \det X(t) \neq 0. \end{cases}$$

A matrix $Y_{t_0}(t)$ é a solução matricial principal do sistema em $t_0 \in I$ se e só se satisfaz

$$\begin{cases} \frac{dY_{t_0}(t)}{dt} = A(t)Y_{t_0}(t) \\ Y_{t_0}(t_0) = I. \end{cases}$$

Definição: Dada uma matriz A, $n \times n$, define-se a **exponencial matricial** e^A como a matriz $n \times n$ dada pela série

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + A^2 \frac{1}{2!} + A^3 \frac{1}{3!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Proposição: Para um sistema de EDOs lineares de primeira ordem homogéneo, de coeficientes constantes

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y},$$

a exponencial matricial de At, ou seja,

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \frac{t^n}{n!},$$

é a (única) solução matricial principal do sistema em $t_0 = 0$, ou seja, a única solução do problema

$$\begin{cases} \frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At} \\ e^{A0} = I. \end{cases}$$

Proposição: O problema de Cauchy para o sistema de EDOs lineares de primeira ordem homogéneo, de coeficientes constantes

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}, \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

tem solução dada por

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0.$$

Proposição: Dadas matrizes A, B, $n \times n$, tem-se

i) Em $t = 0$, $e^{At} = e^{[0]} = I$.

ii) Se

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix}$$

é uma matriz por blocos, então e^{At} também é uma matriz por blocos e tem-se

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{A_k t} \end{bmatrix}$$

iii) Se A e B comutam, ou seja, se $AB = BA$ então $e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt}$.

iv) e^{At} é sempre não singular, com inversa $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$.

v) Se

$$A = S \Lambda S^{-1},$$

então

$$e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}.$$